

# פתרון בגריות במתמטיקה לשאלון 582

פרק 9

## פתרון בידאו של בחינות 2015

|   |            |
|---|------------|
| 1 | מועד חורף  |
| 4 | קיץ מועד א |
| 7 | קיץ מועד ב |

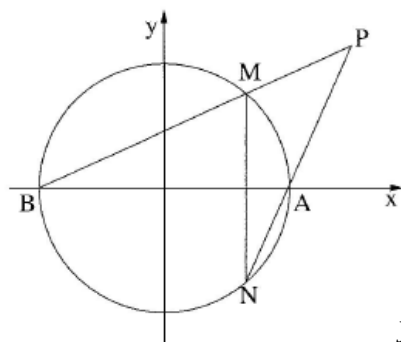
## בגרות חורף 2015:

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 25$ .

המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודות A ו-B.

MN הוא מיתר במעגל, המאונך לציר ה- $x$ .

א. הישרים MB ו-NA נפגשים

בנקודה  $P(x, y)$  כמתואר בציור

(MN אינו מונח על ציר ה- $y$ ).

(1) נסמן:  $M(x_0, y_0)$ . הבע באמצעות  $x_0$  ו- $y_0$

את משוואת הישר MB, ואת משוואת הישר NA.

(2) הראה כי המקום הגאומטרי של הנקודות  $P(x, y)$ , הנוצרות באופן

שתואר, מקיים את המשוואה:  $y^2 = x^2 - 25$ .

ב. אם המיתר MN מונח על ציר ה- $y$ , מצא את רדיוס המעגל החסום

במרובע MBNA.

הערה: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

(2) נתון משולש שקדקודיו הם:  $A(-10, 3, 11)$ ,  $B(-2, -5, -5)$ ,  $C(1, 1, 1)$ .

גובה המשולש לצלע AB הוא CD.

א. מצא את השיעורים של הנקודה D.

ב. נתונה הנקודה  $E(-1, 5, -2)$ .

מהי הזווית בין הישר CE:

(1) לישר AB?

(2) לישר BC?

(3) למישור ABC?

ג. חשב את הזווית בין הישר ED לבין המישור ABC. נמק.

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה:  $|z|i + 2z = \sqrt{3}$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב
- ב. המספר המרוכב  $z_1$  הוא הפתרון של המשוואה שבסעיף א.
- $z_1$  הוא קדקוד הראש של משולש שווה-שוקיים, החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים.  $z_2$  ו- $z_3$  הם שני הקדקודים האחרים של המשולש.
- נתון:  $z_2 = 1$ . המספר המרוכב  $w$  מקיים:  $w = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ .
- חשב את הסכום:  $w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots + w^{4n}$ .
- $n$  הוא מספר טבעי.

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2^{x-m} + 2^{m-x}}$  ונתונה הפונקציה  $g(x)$

המקיימת:  $g(x) = f'(x) \cdot f(x)$ ,  $g(2) = -\frac{3}{4} \ln 2$ ,  $m$  הוא פרמטר.

ידוע כי הפונקציה  $g(x)$  עולה לכל  $x$ .

מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה  $g(x)$  ועל ידי הצירים (מצא ערך מספרי).

(5) נתונה פונקציית הנגזרת:  $f'(x) = \frac{\ln(-x)+2}{x}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .  
 ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  וקבע את סוגה.

- ג. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגה. לפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$  יש אותו תחום הגדרה.

ד. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ .

היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא:

(1) את תחום ההגדרה של  $g(x)$ .

(2) את השיעורים של נקודת הקיצון של  $g(x)$ , וקבע את סוגה.

### תשובות סופיות:

(1) א. i.  $MB: y = \frac{y_0}{x_0+5}x + \frac{5y_0}{x_0+5}$ ,  $NA: y = \frac{y}{5-x_0}x - \frac{5y_0}{5-x_0}$ .

א. ii. הוכחה  $\sqrt{12.5} = 3.535$  ב.

(2) א.  $D(-4.5, -2.5, 0)$  ב. i.  $90^\circ$  ב. ii.  $90^\circ$  ב. iii.  $90^\circ$

ג.  $39.23^\circ$

(3) א.  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  ב. 0

(4) 3.0625

(5) א.  $x < 0$  ב.  $\min\left(-\frac{1}{e}, -e\right)$  ג.  $x_{\min} = -\frac{1}{e^2}$

ד. i.  $x \neq -\frac{1}{e^2}$ ,  $x < 0$  ד. ii.  $\min\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

## בגרות קיץ 2015 מועד א':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1) נתונה פרבולה המקיימת  $y^2 = 2px$ ,  $p > 0$ .

נקודה D נמצאת על הפרבולה ברביע הראשון במרחק 8 מציר ה-x.

א. הבע באמצעות p את המרחק של הנקודה D מן המדריך של הפרבולה. מעבירים שני מעגלים:

מעגל ראשון שמרכזו בנקודה D ורדיוסו  $p+4$ ,

מעגל שני שמרכזו במוקד F של הפרבולה.

המעגל השני משיק מבחוץ למעגל הראשון ומשיק גם לציר ה-y.

ב. היעזר בסעיף א, ומצא את משוואת הפרבולה.

ג. נקודה K נמצאת על הפרבולה שאת משוואתה מצאת.

דרך הנקודה K העבירו משיק לפרבולה ואנך למשיק.

המשיק והאנך חותכים את ציר ה-x בנקודות T ו-S בהתאמה.

המרחק בין הנקודה T לנקודה S הוא 16.

מצא את השיעורים של הנקודה K. (מצא את שתי האפשרויות).

בתשובתך תוכל להשאיר שורש במידת הצורך.

(2) נתון ישר  $\ell$  שמשוואתו  $\underline{x} = (1, 2, -4) + t(1, -2, 2)$ .

מישור  $\pi$  מאונך לישר  $\ell$ , וחותך את ציר ה-x בנקודה A.

נקודה A נמצאת על הקרן החיובית של ציר ה-x במרחק 8 מראשית הצירים O.

נקודות B ו-C הן נקודות החיתוך של המישור  $\pi$  עם ציר ה-y ועם ציר ה-z בהתאמה.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את האורך של כל אחד מששת המקצועות של הפירמידה OABC.

ii. האם הפירמידה OABC היא ישרה? נמק.

ב. נקודה D נמצאת על הקטע AC כך ש-OD חוצה-זווית AOC.

מהו המצב ההדדי בין הישר OD לישר BC? נמק.

(3) נתונה המשוואה  $z^n = 8$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב,  $n > 2$ .

א. הוכח כי  $n$  הפתרונות של המשוואה הם קדקודים של מצולע משוכלל.  
 המספרים  $z_0, z_1, z_2, z_3$  הם ארבעה קדקודים עוקבים מבין  $n$  הקדקודים של המצולע שבסעיף א (לפי סדר המספרים הרשום).  
 $z_0$  הוא מספר ממשי וחיובי. נמצא במישור גאוס ברביע הראשון.

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{8}i \quad \text{נתון:}$$

ב. מצא את הערך של  $n$ .

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$  המוגדרת לכל  $x$ .  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

א. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה אי-זוגית.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות  $a$  (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון

של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

ii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי ציר ה- $x$

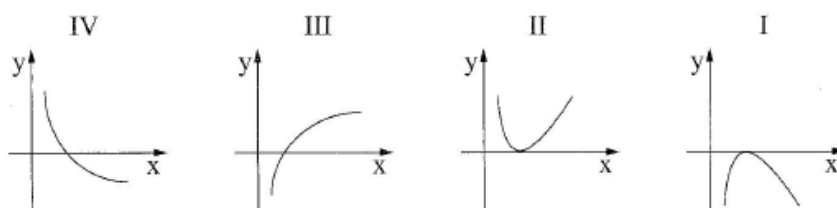
ועל ידי הישרים  $x=1$  ו- $x=-1$ , אם נתון כי  $a=2$ .

ד. נתונה הפונקציה  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = [f(x)]^2$ .

מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $g(x)$ , וקבע את סוגן.

5 נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cdot x \cdot \ln x - x^2$ ,  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. הראה כי לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אחת בלבד, והבע את שיעור ה- $x$  שלה באמצעות  $a$ .
- ג. איזה מבין הגרפים I, II, III, IV שלפניך מתאים לגרף של פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$ ? נמק.



ד. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. אם שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של  $f(x)$  שווה ל-0, מצא את הערך של  $a$ .
- ii. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עבור הערך של  $a$  שמצאת.
- iii. האם עבור הערך של  $a$  שמצאת, יש לפונקציה  $f(x)$  נקודת קיצון? נמק.
- ה. מצא עבור אילו ערכים של  $a$  שיפוע המשיק בנקודת הפיתול של  $f(x)$  גדול מ-0.

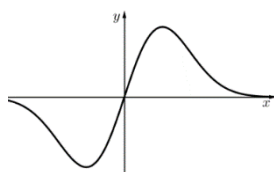
### תשובות סופיות:

1. א.  $\frac{32}{p} + \frac{p}{2}$  ב.  $y^2 = 8x$  ג.  $(6, -\sqrt{48})$ ,  $(6, \sqrt{48})$

2. א. (i).  $BC = \sqrt{32}$ ,  $AB = AC = \sqrt{80}$ ,  $BO = CO = 4$ ,  $AO = 8$  א. (ii). הפרמידה אינה ישרה. ב. מצטלבים.

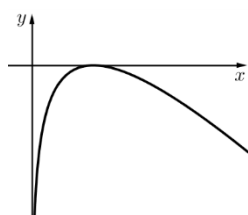
3. א. הוכחה. ב.  $n = 8$

4. א. הוכחה. ב. (i).  $\max\left(2, \frac{2a}{\sqrt{e}}\right)$ ,  $\min\left(-2, \frac{-2a}{\sqrt{e}}\right)$  ב. (ii). להלן סקיצה:



ג.  $x_{\max} = -2$ ,  $x_{\min} = 0$ ,  $x_{\max} = 2$  ג. 1.88

5. א.  $x > 0$  ב.  $x = \frac{a}{2}$  ג. גרף IV. ד. (ii). להלן סקיצה: ד. (i).  $a = 2$  ד. (iii). לא. ה.  $a > 2$



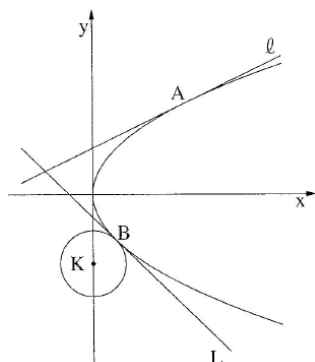
## בגרות קיץ 2015 מועד ב':

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ( $66\frac{2}{3}$  נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה  $33\frac{1}{3}$  נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



(1) נתונה הפרבולה  $y^2 = 4x$ .

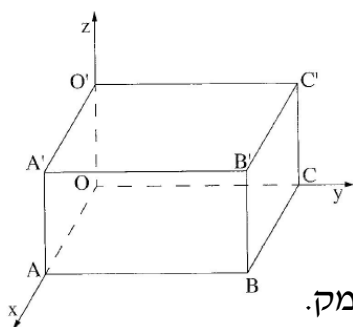
הישרים  $\ell$  ו- $L$  משיקים לפרבולה בנקודות A ו-B בהתאמה.  
הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B נמצאת ברביע הרביעי, כמתואר בציור.  
המשיקים נפגשים בנקודה  $(-2, 1)$ .

א. מצא את השיעורים של הנקודה A, ואת השיעורים של הנקודה B.

ב. הפרבולה משיקה בנקודה B למעגל שמרכזו K ונמצא על ציר ה- $y$  (ראה ציור).  
מעגל שמרכזו M משיק לציר ה- $y$  בראשית הצירים ומשיק מבחוץ למעגל שמרכזו K. המרכז M נמצא משמאל לציר ה- $y$ .

i. מצא את השיעורים של המרכז K.

ii. מצא את משוואת המעגל שמרכזו M.  
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



(2) המקצועות OA, OC ו- $OO'$  של התיבה  $OABCO'A'B'C'$  מונחים על הצירים כמתואר בציור.

נתון כי המישור  $2x + y + 2z - 2m = 0$

עובר דרך הקדקודים A, C,  $O'$ .  $m$  הוא פרמטר גדול מ-0.

א. האם הישר  $BC'$  מקביל למישור הנתון או חותך אותו? נמק.

ב. הישר  $O'M$  נמצא במישור הנתון, ואינו מתלכד עם הישר  $O'A$ .

i. האם הישרים  $BC'$  ו- $O'M$  מקבילים? נמק.

ii. הבע באמצעות  $m$  את המרחק בין הישרים  $BC'$  ו- $O'M$ .

דרך הקדקודים C' ו-B העבירו אנכים למישור  $ACO'$ .

האנכים חותכים את המישור בנקודות E ו-F. אורך הקטע EF הוא  $2\sqrt{2}$ .

ג. מצא את הערך של  $m$ .

(3) ענה על הסעיפים הבאים :

א. סרטט במערכת צירים את המקום הגאומטרי המקיים :  $|z^2 - 3i| = |z^2 - i|$ .

$z$  הוא מספר מרוכב.

ב. שני מספרים מרוכבים שונים,  $z_1$  ו-  $z_2$ , נמצאים על המקום הגאומטרי שסרטטת.

המרחק של  $z_1$  מראשית הצירים שווה למרחק של  $z_2$  מהראשית.

נתון :  $z_1 = 1 + iy_1$  (  $y_1$  הוא מספר ממשי). מצא את הארגומנט של  $z_2$ .

### פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקצית חזקה, פונקציות מעריכיות

#### ולוגריתמיות ( $33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$ .  $a$  הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא (הבע באמצעות  $a$  במידת הצורך) :

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ii. את שתי האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לציר ה- $x$ .

iii. את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

iv. את השיעורים של נקודות הפיתול של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג. הישר  $y = x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודת הפיתול שלה.

לפונקציה  $f(x)$  ולפונקציית הנגזרת  $f'(x)$  יש אותו תחום הגדרה.

סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ .

ציין בגרף את הערכים המספריים של האסימפטוטות ושל נקודות החיתוך עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) נתונה הפונקציה  $f(x) = -\frac{4e^x}{e^x - 2} + e^x + 4$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

ii. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים.

iii. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

iv. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה  $f(x)$ , על ידי

הישר  $x = -1$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי ציר ה- $y$ .

ג. נתונה פונקציה המקיימת  $F(x) = \int f(x) dx$  בתחום  $x > \ln 2$ .

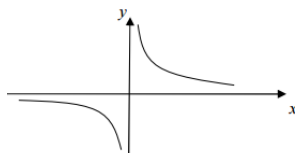
מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $F(x)$  (אם יש כאלה). נמק.

### תשובות סופיות:

(1) א.  $A(4,4)$ ,  $B(1,-2)$  ב. i.  $K(0,-3)$  ב. ii.  $(x+2.47)^2 + y^2 = 6.125$

(2) א. מקביל. ב. i. מצטלבים. ב. ii.  $\frac{2m}{3}$  ג. 2

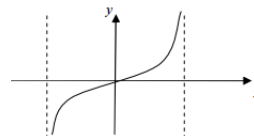
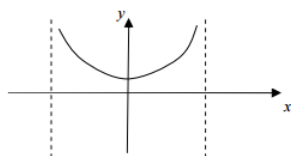
(3) א. להלן סקיצה: ב.  $225^\circ$



(4) א. i.  $-a < x < a$  א. ii.  $x = a$ ,  $x = -a$

א. iii. עלייה:  $-a < x < a$ , ירידה: אין. א. iv.  $(0,0)$

ב. להלן סקיצה: ג. להלן סקיצה:



(5) א. i.  $x \neq 0.693$  א. ii.  $y = 4$  (עבור  $x \rightarrow -\infty$ ),  $x = 0.693$

א. iii. עלייה:  $x > 0.693$ ,  $x < 0.693$ , ירידה: אין.

א. iv.  $(0,9)$ ,  $(1.386,0)$  א. v. להלן סקיצה:

ב. 6.59 ג.  $x_{\min} = 1.386$

